Der Anatomie der Zahlen auf der Spur

Förderung des arithmetischen Verständnisses durch Mathildr

TEXT: **TORBEN RIECKMANN**

Für viele Personen mit Trisomie 21 ist Mathematik nach wie vor ein rotes Tuch. Wie sollte Unterrichtsmaterial gestaltet sein, das Neurodiversität berücksichtigt und auf der ausgeprägten Fähigkeit zur Abstraktion von Lernenden mit Trisomie 21 aufbaut?

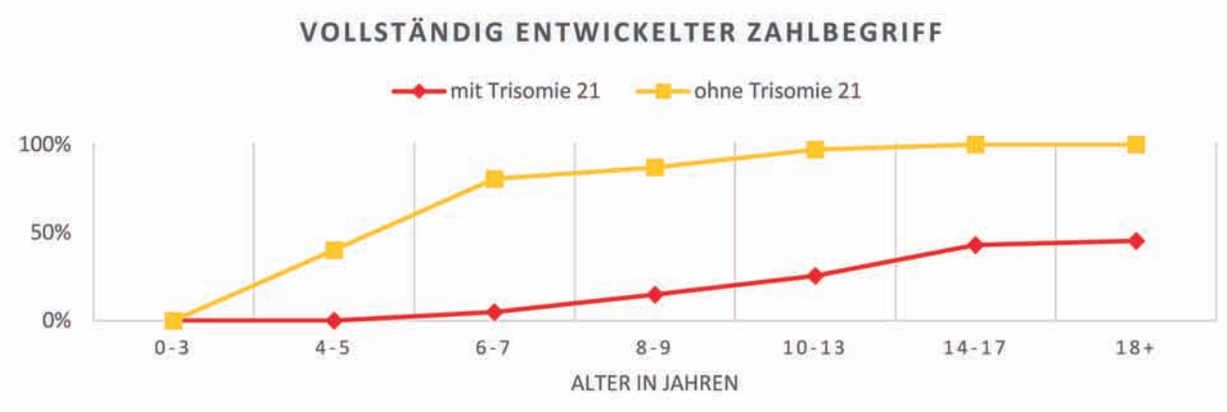
Mathe war schrecklich, das Fach ist mir bis heute ein Rätsel. – Pablo Pineda[1]

Pablo Pineda verfügt über einen Hochschulabschluss in Pädagogik. International bekannt wurde er als Schauspieler mit Trisomie 21 und Inklusionsaktivist. Dass selbst er mathematische Lernschwierigkeiten hat, ist ein Hinweis darauf, dass eine Dyskalkulie (Rechenschwäche) ähnlich wie beispielsweise die Muskelhypotonie regelmäßig mit einer Trisomie 21 einhergeht.

In der Trisomie-21-Studie im Rahmen unserer Aufmerksamkeitsforschung an der Universität Hamburg haben wir mit 1284 Personen mit Trisomie 21 und mit 624 Personen ohne Trisomie 21 Experimente zur Zahlbegriffsentwicklung durchgeführt, die diesen Eindruck erhärten:

Im Altersbereich von vier bis fünf Jahren haben bereits 40 % der Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 einen vollständig entwickelten Zahlbegriff. Einen ähnlichen Wert erreichen die Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 erst im Altersbereich von 14 bis 17 Jahren. Die komplette Gruppe von Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 weist ab dem Alter von 14 Jahren einen vollständig entwickelten Zahlbegriff auf. Die Gruppe mit Trisomie 21 erreicht einen Spitzenwert von 45 % in der Altersgruppe 18+. Über die Hälfte der volljährigen Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 verfügt demnach über kein entwickeltes Verständnis für den Gebrauch von Zahlen als Werkzeuge.[2]

Worin liegen diese mathematischen Lernschwierigkeiten begründet? Neurotypische Menschen (ohne Syndrom) sind in der Lage, bis zu vier Elemente gleichzeitig und korrekt zu verarbeiten. Unsere Untersuchungen zeigen, dass Menschen mit Trisomie 21 lediglich zwei Elemente korrekt simultan verarbeiten können. Diese Aufmerksamkeitsbesonderheiten liegen in ihrem Hirnstoffwechsel begründet, der sich von dem neurotypischer Personen unterscheidet.[3] →



Prozentualer Anteil von Untersuchungsteilnehmerinnen und -teilnehmern einer Altersgruppe mit einem vollständig entwickelten Zahlbegriff

Kulturelle Werkzeuge wie die Schrift oder die Zahl wurden im Laufe von Jahrtausenden entwickelt. Ihre jetzige Form entspricht den Anforderungen, die die Mehrheit der Menschen an sie stellt; sie sind dem Aufmerksamkeitsumfang von neurotypischen Personen angepasst. Die Analyse von Wahrscheinlichkeitsmustern von Buchstabenfolgen zeigt beispielweise, dass diese für einen Aufmerksamkeitsumfang von vier Einheiten optimiert sind.[4]

Ebenso kommt das Dezimalsystem der Aufmerksamkeit von neurotypischen Personen zu Gute. Menschen mit Trisomie 21 werden im Lebensalltag mit einem Zahlensystem konfrontiert, das den Umfang ihrer Aufmerksamkeit überlastet.[5] Unsere Erfahrungen in der Elternberatung und Entwicklungstherapie zeigen, dass Frustrationserlebnisse als Folge von permanenter Überforderung zu Aversionen führen können.

Aufgrund des verringerten Aufmerksamkeitsumfangs sind Menschen mit Trisomie 21 dazu gezwungen, von Eigenschaften abzusehen. Häufig profitieren sie von einer Orientierung an übersichtlichen und abstrakten Zeichen.[6] Diese besondere Abstraktionsfähigkeit kann Grundlage eines erfolgreichen Lernens sein. Die Tablet-App Mathildr (Aussprache: „Matilda“) trägt dieser Tatsache Rechnung, indem sie ein Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten[7] ermöglicht. Als Ausgangsabstraktion macht sie die Null, als „Nichts zum Anfassen“, sichtbar.[8]

Der Weg zur Abstraktion

Die App, die sich am Aufmerksamkeitsumfang von Lernenden mit Trisomie 21 orientiert, wurde unter Berücksichtigung der Überlegungen des Psychologen Pjotr Galperin (1902 – 1988) konzipiert. Dieser beschreibt mithilfe der „etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen“, wie sich Lernende die Fähigkeit aneignen, eine ursprünglich gegenständliche Handlung gedanklich durchzuführen. Galperin unterscheidet zwischen materiellen und materialisierten Handlungen. Materielle Handlungen, wie zum Beispiel erste Rechenoperationen mithilfe von Gegenständen, würden in der Anfangsphase des Lernens ihren Zweck erfüllen. Sie hätten aber den Nachteil, dass sie zum Aufbau tiefergehender Kenntnisse an ihre Grenzen geraten. In materialisierten Handlungen arbeiten die Lernenden mit Kopien, Darstellungen, Schriften oder gegenständlichen Modellen des Objekts. Laut Galperin ermöglichen diese, Charakteristika des Objekts für die Lernenden erkennbar zu machen, die ihrer Aufmerksamkeit ansonsten entgangen wären.[9]

In der ersten Etappe zur Ausbildung geistiger Handlungen führen die Lernenden die Handlung am Material durch und erschließen sich diese vollständig mithilfe von Entfaltung und Verallgemeinerung. Eine Handlung zu entfalten bedeutet, sie in einzelne sichtbare Operationen zu gliedern, die die lernende Person nachvollziehen kann. In der Verallgemeinerung einer Handlung werden bestimmte Eigenschaften des Objekts, mit dem operiert wird, hervorgehoben.[10]

Die zweite Etappe zeichnet sich dadurch aus, dass alle relevanten Operationen der Handlung in Worte gefasst werden. Die lernende Person begleitet ihre Handlung mittels „äußerer Sprache“. Das heißt, dass sie für andere nachvollziehbar spricht und ihr eigenes Handeln erläutert. In der dritten Etappe löst sie sich sukzessive von dem Material und führt die Handlung gedanklich durch. Als Unterstützung verwendet sie die äußere Sprache „für sich“. Die Sprache, mit der sie ihre Handlung begleitet, ist für Zuhörende nun weniger verständlich als noch in der zweiten Etappe. Letztlich verkürzt die lernende Person diese Sprache in der vierten Etappe vollständig zu einer gedanklichen, „inneren Sprache“. Sie ist nun in der Lage, die Handlung ohne unterstützendes Material oder Lautsprache durchzuführen.[11]

Die Anatomie der Zahlen

Mathildr gibt eine Struktur von Bündelungen und Zerlegungen von Hilfsmengen in materialisierter Form vor. Die Ausgangsabstraktion ist die Unterscheidung von Null und Eins, dargestellt als Ring und Kirsche. Je zwei dieser stilisierten Kirschen bilden ein Paar, das durch symbolische Kirschstängel hervorgehoben wird. Dies unterstützt die simultane Unterscheidung von Mengen, die gerade bzw. ungerade Anzahlen von Elementen enthalten. Die Paare wiederum sind nach einem Bündelungsschema geordnet, das sich an Würfelpunktbildern orientiert.

Eine derartige Strukturierung von Mengen mag auf den ersten Blick ungewohnt erscheinen, lässt aber tiefe Einblicke in die „Anatomie von Zahlen“ zu, genauer:

Wie anatomische Darstellungen sich auf ein Muster beschränken, um das Skelett, das Gefäßsystem oder das Nervensystem besonders hervorzuheben, sollen die

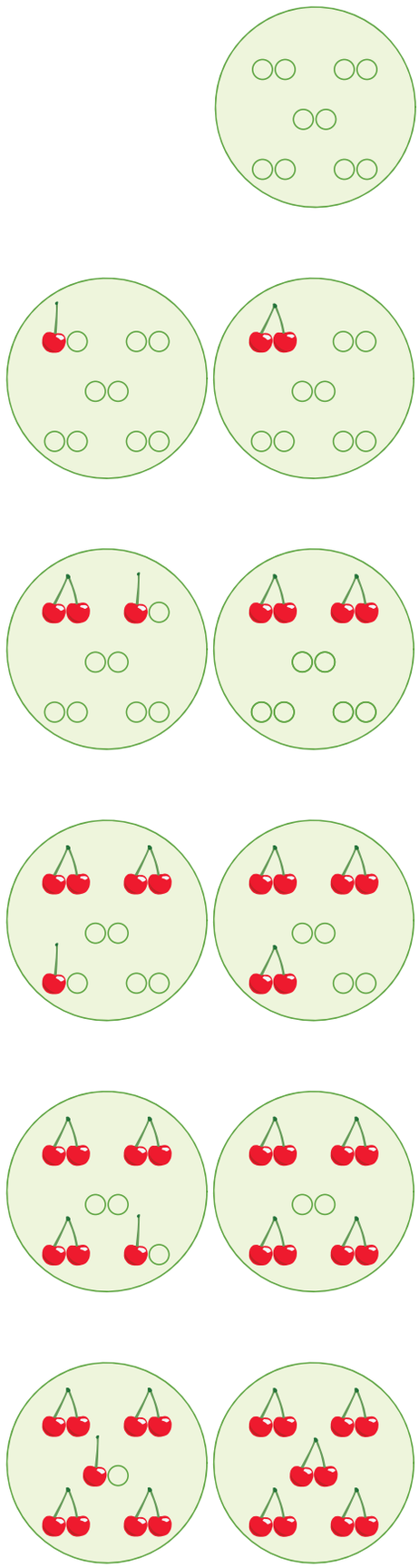


Abb. 1: Übersicht über die Mengenbilder der Anzahlen 0 bis 10 in Mathildr

hier immer wiederkehrenden Muster von Kirschpaaren den Lernenden eine Möglichkeit der Zahlbündelung und -zerlegung vor Augen führen. So wird beispielsweise hervorgehoben, dass die Anzahl von sechs Kirschen aus drei Paaren besteht und die Anzahl von acht aus vier Paaren. Neun Kirschen bestehen aus vier Paaren und einer einzelnen Kirsche, usw.

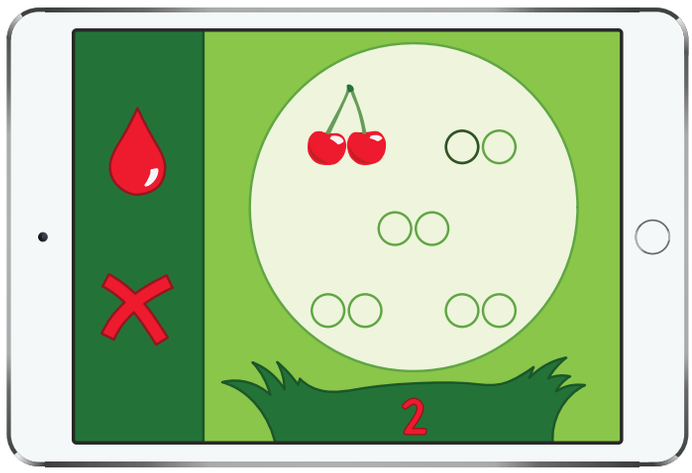
Der Hintergrund dieser Hervorhebung: Die Beziehung zwischen Rechenoperationen wie 2 + 4 = 6 und 6 – 4 = 2 wird beispielsweise erst verständlich, wenn die Möglichkeit der Zerlegung der Anzahl sechs in die Anzahlen vier und zwei berücksichtigt wird. Solche Rechenoperationen beruhen auf einem Überblick über die Möglichkeit, Anzahlen zu bündeln und zu zerlegen. Die Strukturierung in Paaren kommt dabei einem Aufmerksamkeitsumfang von zwei Einheiten entgegen.

Mit Mathildr lernen

In der Trisomie-21-Studie, der Elternberatung und der Entwicklungstherapie haben wir die Erfahrung gemacht, dass Tabletcomputer ein äußerst geeignetes Medium für Lernende mit Trisomie 21 darstellen. Ein Grund ist neben der Motivation, die viele Kinder in der Arbeit mit diesem alternativen Medium entwickeln, die höhere Barrierefreiheit als bei anderen Medien. Während das Schreiben auf Papier oder das Hantieren mit kleinen Objekten zu Überanstrengung und Frustrationserlebnissen führen können, ermöglicht die Arbeit mit einem Touchscreen die Fokussierung auf den wesentlichen Lerninhalt.[12] Dies ist einer der Gründe, weshalb Mathildr als App realisiert wurde. Darüber hinaus beinhaltet Mathildr Funktionen, die analoge Lernmaterialien nicht bereitstellen können. Beispielsweise unterstützt die App Lernende, die Kirschen in der richtigen Reihenfolge zu legen. Durch eine Einfärbung des folgenden Ringes ist eindeutig erkennbar, auf welche Position die nächste Kirsche platziert werden kann. (Abb. 2)

Wird dieser Ring berührt, erscheint an seiner Stelle eine Kirsche. In umgekehrter Reihenfolge können einzelne Kirschen durch eine Berührung wieder entfernt werden. Da die Kirschen nicht beliebig platziert oder entfernt werden können, ist gewährleistet, dass das Mengenbild einer Anzahl immer gleich gestaltet ist. Eine Berührung des Kreuzes hat zur Folge, dass die Anzeige auf null Kirschen zurückgesetzt wird. Im unteren Bereich des Bildschirms wird die Anzahl der Kirschen angezeigt. Diese Anzeige lässt sich, ebenso wie die Bedienungselemente auf der linken Seite, bei Bedarf ausblenden.

Abb. 2

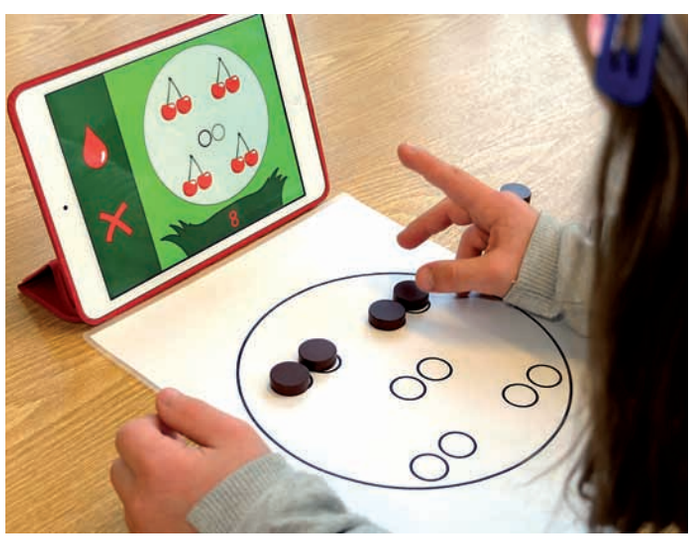


In der pädagogischen Arbeit mit der App sollte der Entwicklungsstand der lernenden Person berücksichtigt werden, damit diese weder über- noch unterfordert wird. Da der Unterricht möglichst individuell gestaltet sein sollte, existiert kein Rezept, das Schritt für Schritt befolgt werden kann. Stattdessen folgen einige Aufgabenformate und Spielideen, die sich in der Praxis bewährt haben. Es wird ausdrücklich empfohlen, den Schwierigkeitsgrad individuell anzupassen. Eine Möglichkeit zur Erleichterung des Einstieges in das Material ist die Reduzierung der zu bearbeitenden Mengenbilder. Für viele Lernende hat es sich als sinnvoll erwiesen, anfangs gerade Anzahlen zu verwenden und die ungeraden Anzahlen erst später hinzuzunehmen.

Erste Etappe: Entfalten und Verallgemeinern

In der ersten Etappe wird die grundlegende Mechanik der App thematisiert. Die lernende Person erforscht, wie Kirschen platziert und wieder entfernt werden können und welche Handlungsmöglichkeiten die App bietet. Um die Darstellung der Mengenbilder zu entfalten und zu verallgemeinern, empfiehlt sich eine Übertragung auf andere Materialien. Mithilfe von Mühle- oder Backgammonsteinen in angemessener Größe können Mengen nachgebildet werden (Abb. 3): In einem dialogischen Spiel legt eine Person eine selbst gewählte Menge mithilfe der App und die andere Person versucht, diese mit Spielsteinen nachzubilden. Gemeinsam kann dann darüber diskutiert werden, ob das Bild korrekt wiedergegeben wurde und woran dies zu erkennen ist. Es empfiehlt sich die Verwendung einer Unterlage, auf die das Mengenbild der Anzahl null aufgezeichnet ist. →

Abb. 3



Zweite Etappe: Muster erkennen und verbalisieren

Die zweite Etappe zeichnet sich dadurch aus, dass die Arbeit mit der App einheitlich lautsprachlich begleitet wird, um die lernende Person in der Entwicklung einer eigenen äußeren Sprache anzuregen. Als praktikabel hat sich die Bezeichnung „Ring“ für einen leeren Ring, „Kirsche“ für eine einzelne Kirsche und „Paar“ für ein Kirschpaar erwiesen. Die Anzahl sieben wird beispielsweise folgendermaßen verbalisiert: „Paar, Paar, Paar, Kirsche.“ Sollte die lernende Person eigene Bezeichnungen für Ringe, Kirschpaare und einzelne Kirschen finden, können diese übernommen werden.

In dieser Etappe empfiehlt sich der zusätzliche Einsatz von Lernkarten. Benötigt werden Mengenkarten mit den Anzahlen null bis zehn, dargestellt durch rote Kirschen, sowie Mengenkarten, ebenfalls mit den Anzahlen null bis zehn, die mithilfe gelber Kirschen dargestellt werden. Außerdem werden Karten benötigt, die die (natürlichen) Zahlen 0 bis 10 zeigen.

Mengenbild nachlegen

Die Mengenkarten mit roten Kirschen werden gemischt. Abwechselnd wird eine Karte gezogen und das Mengenbild in der App reproduziert. Dabei wird für jedes gelegte Kirschpaar das Wort „Paar“ gesagt. Geschickte Lernende können ein Kirschpaar platzieren, indem sie beide Ringe mit zwei Fingern gleichzeitig berühren. Zur Prüfung werden die Mengenbilder der Karte und der App miteinander verglichen. (Abb. 4)

Statt der Karten mit den Mengenbildern können die Zahlenkarten verwendet werden. Diese Variante der Aufgabe legt den Fokus auf die Verknüpfung von der symbolischen Schreibweise von natürlichen Zahlen und deren Mengenbildern in Mathildr. Die Prüfung, ob das Mengenbild korrekt ist, kann dann anhand der angezeigten Zahl unter dem Mengenbild vorgenommen werden.

Karten zuordnen

Auf dem Tisch werden Karten mit den Mengenbildern mit roten Kirschen und die gleichen Karten mit gelben Kirschen aufgedeckt verteilt. Ziel ist, jedem Mengenbild aus roten Kirschen dem gleichen aus gelben Kirschen zuzuordnen. Dies kann gemeinschaftlich oder in Form eines Wettspiels geschehen. Findet die lernende Person zwei Karten, die mutmaßlich zusammenpassen, wird sie angeregt, durch Verwendung der Worte „Paar“ und „Kirsche“ zu verbalisieren, warum die Mengenbilder gleich sind.

Abb. 4

Statt der gelben Mengenbilder können auch hier als Variante Zahlenkarten eingesetzt werden. Darüber hinaus kann der Schwierigkeitsgrad erhöht werden, indem die Karten verdeckt auf den Tisch gelegt werden.

Hohlmaße

Auch in der zweiten Etappe bietet sich die Übertragung der Mengenbilder in andere Materialien an. Eine bewährte Methode zur Zahlbegriffsentwicklung ist die Arbeit mit Hohlmaßen. (Abb. 5) Benötigt werden zehn gleich große Gefäße sowie ein größeres Gefäß, das den Inhalt von zehn kleinen Gefäßen fasst. Mit ihrer Hilfe kann das dekadische Positionssystem veranschaulicht werden: Das größere Gefäß wird mit Wasser oder Reis gefüllt, die kleinen Gefäße werden entsprechend dem Mathildr-Mengenbild der Anzahl null angeordnet. Die lernende Person soll nun herausfinden, in wie viele kleine Gefäße der Inhalt des großen Behälters passt. Dazu schüttet sie den Inhalt des großen Behälters in die kleinen Behälter um. Sie wird feststellen, dass der Inhalt des größeren Gefäßes dem Inhalt zehn kleiner Gefäße entspricht. Die kleinen Gefäße stellen demnach Einer dar, ein großes Gefäß den Zehner. Um auch Hunderter darzustellen, können noch größere Gefäße verwendet werden, die den Inhalt von zehn Zehner-Gefäßen fassen.[13]

Abb. 5

Dritte und vierte Etappe: Gedankliche Operation

Das Eintreten der dritten Etappe ist daran zu erkennen, dass die lernende Person eine „äußere Sprache für sich“ verwendet, sich langsam von den Materialien löst und die Zuordnung und Verbalisierung der Mengenbilder rasch und sicher beherrscht. Wird das konkrete Material nicht mehr benötigt, um die Zusammensetzung einer Anzahl aus Paaren und einzelnen Kirschen nachzuvollziehen, ist die vierte Etappe erreicht. Jetzt können mithilfe des Materials Additionen vorgenommen werden.

Addition

Auch die Aneignung der Addition vollzieht sich in vier Etappen. In der ersten Etappe wird der lernenden Person die Funktion des Farbtropfens verdeutlicht: Wird dieser berührt, wechselt seine Farbe von Rot nach Gelb. Kirschen, die fortan platziert werden, sind gelb. Um Additionen darzustellen, werden rote und gelbe Kirschen kombiniert (Abb. 6):

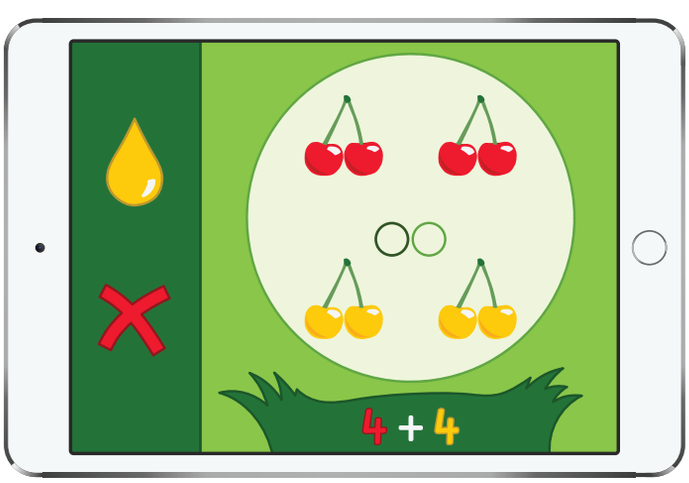


Abb. 6

Die Summanden werden entsprechend der gelegten Kirschen im unteren Teil des Bildschirms angezeigt. Das Mengenbild, das durch die verschiedenfarbigen Kirschen dargestellt wird, veranschaulicht die Summe.

Noch in der ersten Etappe empfiehlt sich die Nachbildung solcher Additionen mit Spielsteinen unterschiedlicher Farben. In der zweiten Etappe sollten die Worte „plus“ und „gleich“ eingeführt werden. Nun können Additionsaufgaben, die auf einem Zettel notiert wurden, mithilfe der App nachvollzogen werden. Dabei sollte die Bearbeitung ständig sprachlich begleitet werden. Die Rechenoperation 4 + 4 sollte als „vier plus vier“ bezeichnet werden. Um das Ergebnis zu ermitteln, wird das Ergebnis als „Paar, Paar, Paar, Paar“ und schließlich „Acht“ verbalisiert. Das Ergebnis der Aufgabe wird auf dem Zettel vermerkt, die Aufgabe noch einmal verbalisiert: „Vier plus vier gleich acht.“

Während sich diese „äußere Sprache“ in der dritten Etappe abermals in eine „äußere Sprache für sich“ wandelt, nehmen Lernende immer mehr Abstand von der App. In der vierten Etappe führen sie die Rechenoperationen gedanklich und ohne Unterstützung des Materials durch.

Ausblick

Mathildr ist eine Möglichkeit, Strukturen von Mengen im Mathematikunterricht zu Hause, in der Schule oder in der Einzelförderung zu thematisieren. Das Material ist dank der Berücksichtigung von Aufmerksamkeitsbesonderheiten und dem Einsatz eines Tablets weitgehend inklusiv. Die Eignung für eine individuelle Person ist allerdings davon abhängig, ob diese eine intrinsische Motivation zur Arbeit mit dem Material entwickelt. Auch innerhalb der Gruppe von Personen mit Trisomie 21 herrscht eine große Vielfalt an Interessen und Lerntypen. Die Beschränkung auf ein Material oder einen Förderansatz allein ist daher grundsätzlich nicht empfehlenswert. Schafft man den Lernenden stattdessen eine Auswahl an Materialien und gibt ihnen die Zeit, diese zu erproben, ist die Chance groß, dass ein geeignetes Material gefunden wird.

Die App wird ständig weiterentwickelt: Derzeit wird an einer Veranschaulichung der Subtraktion und der Darstellung eines Vierer-, Zwanziger- und Hunderterfeldes gearbeitet. Einige dieser Ergänzungen werden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung dieses Artikels bereits verfügbar sein. Weitere Informationen finden Sie unter: www.mathildr.de

An dieser Stelle sei allen Eltern, Lehrerinnen und Lehrern, Therapeutinnen und Therapeuten und insbesondere Lernenden mit und ohne Trisomie 21 gedankt, die Mathildr im Mathematikunterricht einsetzen, das Projekt mit ihren Vorschlägen unterstützen und ermutigende Ergebnisse erzielen.

[1] Pineda, Pablo & Viciano Gofferje, Astrid (2004). Die unmögliche Karriere. FOCUS Magazin, 22, S. 100–104. Zugriff am 8.12.2014. Verfügbar unter http://www.focus.de/wissen/natur/bildung-die-unmoegliche-karriere_aid_198391.html

[2] Rieckmann, Torben (2016). Kognitive Entwicklung und Mathematik. In A. F. Zimpel (Hrsg.), Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können (S. 166–183). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 168.

[3] Zimpel, André F. (Hrsg.) (2016). Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 121 f.

[4] Ebd., S. 117.

[5] Rieckmann (2016), S. 173.

[6] Zimpel (2016), S. 136.

[7] Vgl. Devlin, Keith. (2009). Should Children Learn Math by Starting with Counting? Zugriff am 30.6.2016. Verfügbar unter https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_01_09.html & Davydov, V. V., Gorbov, S., Mukulina, T., Savelyeva, M. & Tabachnikova, N. (1999). Mathematics: Moscow Press.

[8] Vgl. Zimpel, André F. (2010). Zur Neuropsychologie des abstrakten Denkens unter den Bedingungen einer Trisomie 21. Leben mit Down-Syndrom (63), S. 28–35.

[9] Galperin, Pjotr J. (1967). Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen. In P. J. Galperin, A. N. Leont'ev & E. Däbritz (Hrsg.), Probleme der Lerntheorie (S. 33–49). Berlin: Volk und Wissen, S. 36 f.

[10] Ebd., S. 38.

[11] Ebd., S. 39 ff.

[12] Rieckmann (2016), S. 178.

[13] Zimpel, André F. (2012). Der zählende Mensch. Was Emotionen mit Mathematik zu tun haben (2. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 138.